ABCustos, São Leopoldo: Associação Brasileira de Custos, v. 2, n. 3, p. 108-132, set./dez. 2007 ISSN 1980-4814

Sistema de informações interdependentes: uma aplicação da teoria dos jogos na distribuição do custo conjunto

Juliana Pinto
Mestranda em Ciências Contábeis pela Universidade Regional de Blumenau – FURB
Rua Antônio da Veiga, 140, Sala D206. Bairro Victor Konder. Blumenau/SC. CEP: 89012-900
E-mail: julianapinto@smo.com.br

Tarcísio Pedro da Silva
Mestrado em Ciências Contábeis pela Universidade Regional de Blumenau – FURB
Rua Antônio da Veiga, 140, Sala D206. Bairro Victor Konder. Blumenau/SC. CEP: 89012-900
E-mail: tarcisio@furb.br

Nelson Hein
Doutorado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Professor do Programa da Universidade Regional de Blumenau – FURB
Rua Antônio da Veiga, 140, Sala D206. Bairro Victor Konder. Blumenau, SC. CEP: 89012-900
E-mail: hein@furb.br

RESUMO

O artigo que se apresenta objetiva a sistematização, apresentação dos conceitos fundamentais e utilização da Teoria dos Jogos aplicada a distribuição do custo conjunto, na forma de um sistema de informações interdependentes. É realizada a formalização matemática dos principais conceitos clássicos de solução de um jogo e a apresentação de um exemplo que ilustra sua aplicação ao problema da distribuição de custo conjunto. Como produto da pesquisa conseguiu-se reunir sistematicamente o conjunto de conceitos de solução de jogos, dos quais se derivam todos os conceitos encontrados nos textos atuais. Apresentam-se os conceitos de solução para os chamados jogos cooperativos por meio do conceito de objeção e contra-objeção, de forma a mostrar que os mesmos podem ser vistos como um processo de negociação. Por último são discutidos os resultados e pontos de discussão para uma próxima investigação.

Palavras-chave: Custos conjuntos. Teoria dos jogos. Sistemas de informação.

Interdependent information in distribution of cost sets

ABSTRACT

The objective of this article was to present the systemization and presentation of fundamental concepts and use of Game Theory as applied to distribution of cost sets, in the form of an interdependent information distribution. Mathematical formalization of the principal classical concepts involved in finding game solutions is made, along with presentation of an example that illustrates its application to the problem of distribution of cost sets. One product of the research was that it systematically bringing together the groups of concepts that deal with solving game problems, from which derive all the concepts found in current texts. The article presents the solution concepts for so-called cooperative games by means of the concept of objection and counter-objection, in a way that shows that these can be seen as a process of negotiation. Last but not least, results and discussion points for further investigation are discussed.

Key words: Cost sets. Game theory. Interdependent decisions.

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Jogos, que poderia chamar-se muito apropriadamente de Teoria das Decisões Interdependentes, tem como objeto de análise situações nas quais o resultado da ação de indivíduos, grupos de indivíduos ou instituições, depende substancialmente das ações dos outros envolvidos. Em outras palavras, trata de situações em que nenhum indivíduo pode convenientemente tomar decisão sem levar em conta as possíveis decisões dos outros.

O primeiro passo para o seu desenvolvimento foi dado por Von Neumann, em 1928, com a demonstração do teorema *minimax*. Contudo, o autor só despertou a atenção do público em 1944, quando, em parceria com Morgenstem, propôs a análise do comportamento econômico via perspectiva do “jogo de estratégia”, criando assim a expectativa de reformulação da teoria econômica numa base totalmente nova, na qual o conceito de “processo competitivo” seria reestruturado em termos de mecanismos em que os agentes econômicos atuam estrategicamente (Von Neumann; Morgenstern, 1972).

Nesse primeiro momento, as aplicações mais bem-sucedidas se realizaram no campo da análise de mercados oligopolistas, obtendo resultados interessantes, embora ainda limitados pelos recursos matemáticos disponíveis.

Em 1950, John F. Nash demonstra o teorema *minimax* para grande número de agentes. Em 1952, Lloyd Shapley apresenta o conceito de “núcleo”. Em 1959, Martin Shubik demonstra que a clássica “curva de contrato” de Edgeworth era idêntica ao conceito de solução desenvolvido por Shapley, permitindo que a teoria neoclássica se livrasse de um dos seus principais problemas metodológicos. Naquele momento, enquanto a análise do problema do equilíbrio geral, conduzida principalmente por Anow, Debreu e McKenzie, era estritamente paramétrica, ao considerar os agentes econômicos como “tomadores de preços”, a Teoria dos Jogos, de posse de novos recursos técnicos, permitia analisar a questão da formação de preços como resultado de um amplo processo de barganha multilateral.

Nos anos de 1960 a popularidade da teoria entrou novamente em estado latente. Seu debate ficou restrito apenas a alguns pequenos grupos de pesquisadores desmotivados para publicar os resultados de suas pesquisas. Esse fenômeno já havia acontecido nos anos 1950, quando por alguns anos tornou-se praxe publicar apenas parte dos resultados das pesquisas realizadas. Um exemplo importante foi o FoIk Theorem que, devido a esse tipo de comportamento, ficou praticamente desconhecido por um período de tempo considerável.

A partir da segunda metade dos anos 1960, engenheiros e economistas começaram a perceber a Teoria dos Jogos como um instrumento de considerável alcance para uma velha questão que voltara a ganhar fôlego: a análise, projeto e implementação de mecanismos de alocação de recursos. O principal protagonista dessa questão foi Hurvicz (1973). Sua preocupação central voltava-se para a análise institucional, especialmente em economias descentralizadas, em termos de informações. Para tal propósito, envolveu-se na construção de mecanismos de alocação ou de planejamento que produzissem resultados “satisfatórios”. Como cada mecanismo de alocação de recursos contém implicitamente definido um jogo, abre-se um novo campo de pesquisa: a análise e projeto de mecanismos de alocação de recursos por meio das técnicas da Teoria dos Jogos.

A literatura concernente à teoria da escolha social também acabou constituindo uma fonte de pesquisa para a Teoria dos Jogos. Este campo de pesquisa teve origem quando Gibbard (1973) e Satherhwaite (1975), independentemente, resolveram indagar o que aconteceria se os agentes estudados por Arrow (1965) votassem estratégicamente ou de uma forma que não fosse isomórfica em relação às suas verdadeiras preferências. A resposta encontrada foi, como era de se esperar, que as regras de votação usualmente utilizadas podem permitir escolhas sociais que não sejam “ótimos de Pareto”. A análise desta questão acabou gerando um campo de pesquisa (D`Aspremont, 1979) em que se procura desenvolver jogos que possam representar mecanismos de escolha, em que os agentes envolvidos são incentivados a votar estrategicamente.

Outro campo de pesquisa, também desenvolvido na década de 1970, diz respeito à distribuição de custo conjunto (Moreno, 1996). A Teoria dos Jogos tem-se dedicado de forma brilhante também a essa questão e tem-se destacado ao analisar e propor soluções para situações concretas e análogas às que serão apresentadas adiante.

Cabe ressaltar que a análise do equilíbrio geral desenvolvida pela Teoria Neoclássica tem sido quase completamente suplantada pela Teoria de Jogos não-cooperativos, principalmente a partir da segunda metade década de 1980, quando a atenção de muitos pesquisadores tais como, Jacquemin (1987), Tirole (1988), Farrel e Masktn, (1989), Kreps (1990) e Fudenberg (1991), passou a ser dirigida para a modelagem de jogos dinâmicos, levando em conta a hipótese de informação imperfeita e de informação incompleta.

Um jogo também pode diferenciar-se de acordo com o conjunto de informações que os jogadores detêm. Um jogo é de informação completa ou de informação incompleta segundo o conhecimento que o jogador tiver, no tocante às seguintes informações: (a) o conjunto de jogadores; (b) as estratégias disponíveis para cada jogador; e (c) todos os possíveis resultados para todos os jogadores. Um jogo é de informação completa quando cada jogador conhece (a), (b) e (c) e é de informação incompleta quando um ou mais jogadores desconhecem alguma das informações citadas. Em relação aos lances ou movimentos, um jogo pode ser de informação perfeita ou de informação imperfeita. Um jogo é de informação perfeita se a cada movimento todos os jogadores conhecem as escolhas feitas nos movimentos anteriores. Caso esta condição não se verifique, o jogo é de informação imperfeita.

Dentre as diversas situações que podem ser caracterizadas como jogo, pode-se identificar dois tipos fundamentais: (1) o jogo não-cooperativo, aquele cujas condições orgânicas não permitem a formação de coalizões que possam determinar o seu resultado, e (2) o jogo cooperativo, aquele cujas condições orgânicas facultam aos participantes a possibilidade de atuarem mediante a formação de coalizões.

2 JOGOS NÃO-COOPERATIVOS

Para caracterizar o que se entende por conceito de solução para um jogo não-cooperativo supõem-se uma situação dada por: (1) a existência de um conjunto de agentes, com n jogadores, I= {1,...,n}; (2) uma família de conjuntos de estratégias (Si)i □ I, na qual cada conjunto Si representa todas as estratégias sk disponíveis para cada jogador i, (i e I); (3) uma família de funções (Pi)i□I, de valor real, na qual cada uma define um resultado ou payoff Pi (s), para cada jogador, em função das decisões tomadas por todos jogadores, ou em função do vetor que contém as estratégias adotadas por cada jogo e estratégias onde a i-ésima componente do vetor S que foi substituida por s'k . Assim define-se a solução do problema do jogador individual como s_k tal que:

(1) $$P_i\left(s \backslash s'_k\right) \geq P_i\left(s^* \backslash s'_k\right) \quad \text{para todo} \quad s'_k \in S_i \quad \text{e} \quad i \in I.$$

A questão para o analista aqui, é indicar sob que condições o jogo terá solução, concebendo solução como uma situação na qual, dadas as decisões, nenhum agente tem qualquer estímulo para alterá-la. Pode-se dizer que, matematicamente, existirá solução se existir uma combinação de estratégias s para a qual.

(2) $$P_i\left(s^*\right) \geq P_i\left(s^* \backslash s'_k\right) \text{ para todo } s'_k \in S_i \text{ e } i \in I.$$

A n-upla de estratégias s representa o equilíbrio de um jogo não-cooperativo ou ponto de equilíbrio de Nash. Esse conceito de solução implica que nenhum participante se beneficia mudando sua estratégia em s, quando todos os demais mantêm as suas (Nash, 1951). Em outras palavras: no equilíbrio, nenhum agente tem estímulo para alterar unilateralmente a sua estratégia.

Convém ainda distinguir os jogos finitos dos jogos infinitos. Jogos finitos são aqueles em que cada participante se depara com um conjunto finito de escolhas, ou seja, escolhe sua estratégia dentro de um conjunto finito de possibilidades. No jogo infinito o conjunto de possibilidades no qual cada participante faz sua escolha é infinito.

Solução para um jogo infinito: o teorema de Nikaido e Isoda demonstra (Schotter; Schwödiauer, 1980) que, dado um jogo na forma normal, se o conjunto de estratégias dos jogadores consiste de subconjuntos convexos e compactos de espaços Euclidianos, Si □ □mi, e suas funções de resultados, Pi, forem contínuas e côncavas em Si, existirá sempre um ponto de equilíbrio na forma em que foi definido por Nash, que, no entanto, sempre será necessariamente único.

Solução para um jogo finito: neste caso, sob o domínio de estratégias puras, ou seja, sob o domínio de estratégias na forma até aqui definida, não é possível estabelecer condições gerais sob as quais um jogo não-cooperativo de n-pessoas tenha sempre solução. Todavia, o teorema principal de Nash (1951) mostra que sob o domínio de estratégias mistas, estratégias puras associadas a uma distribuição de probabilidade, todo jogo finito tem no mínimo um ponto de equilíbrio. Convém acrescentar que, como no caso do teorema aplicado aos jogos infinitos, o teorema que sustenta a solução para os jogos finitos, além de não garantir a unicidade, também não garante a propriedade de equivalência e interchangeabilily quando o problema apresenta mais de uma solução.

Portanto, sob a condição de impossibilidade de os agentes estabelecerem coalizões, nem mesmo para o caso mais simples - que é o jogo de duas pessoas, do tipo soma-zero se pode garantir sempre a existência de pontos de equilíbrio com estratégias puras (Hein, Horner, Rautenberg, 2004a). Nesse caso, quando esses pontos existem, não são necessariamente únicos. No entanto, adotando-se o conceito de estratégias mistas, é possível construir uma teoria geral para os jogos de duas pessoas, do tipo soma-zero. O fundamento dessa generalização foi fornecido por Von Neumann mediante o teorema *minimax*, segundo o qual, sob o domínio de estratégias mistas, todo jogo de duas pessoas, do tipo sorna-zero, tem no mínimo um ponto de equilíbrio e, quando possui vários, eles são equivalentes e as respectivas estratégias de equilíbrio são intercambiáveis. Nesse caso as estratégias mistas que reproduzem a solução de Nash podem ser determinadas pela solução de um problema de programação linear, formalizado a partir dos parâmetros fornecidos pelo respectivo jogo.

3 JOGOS COOPERATIVOS

Os jogos chamados cooperativos constituem uma classe determinada de jogos e se diferenciam dos jogos não-cooperativos, principalmente, pelo fato de que, ao contrário dos jogos não-cooperativos, possuem como já afirmando anteriormente, em sua estrutura interna, condições que facultam aos agentes de formarem coalizões entre si, com vistas a garantir um determinado resultado. Por uma coalizão entende-se qualquer subconjunto do conjunto de jogadores, I, constituído de jogadores que resolvem agir como uma equipe no processo de escolha de estratégias.

A análise do jogo cooperativo dispensa a utilização do jogo na forma normal, pois necessita apenas dos resultados ou ganhos que os jogadores ou as coalizões podem garantir para si. Essas informações estão contidas na função característica.

A função característica, V, é definida como a relação que associa a cada coalizão $K \subset I$, ($K \neq \emptyset$), o conjunto de todos os vetores-resultados ou vetores de ganhos, $V(K) \subset \mathbb{R}^k$ (espaço Euclidiano de dimensão k, em que k é o número de elementos da coalizão K) que a coalizão K pode garantir. Na verdade, dado o propósito, não é preciso, como se verá adiante, utilizar ou conhecer extensivamente a função característica. Para efeito de clareza e simplicidade será suposto que a função de resultados que representa os ganhos individuais de cada participante do jogo seja “transferível”. Admitir que a função de resultados é transferível significa que o ganho total alcançado por uma coalizão pode livremente ser dividido entre seus membros, da forma que melhor lhes convier. Pode-se assim admitir a existência de pagamentos à parte, ou seja, admitir a possibilidade de redistribuição dos ganhos fora do jogo propriamente dito. E, para tanto, basta que a função de resultados seja transferível, isto é, basta que o valor do resultado seja mantido quando redistribuido.

Na análise da Teoria dos Jogos, sob a hipótese de que as funções de resultados sejam transferíveis, não existe perda conceitual. Todos os conceitos de solução para jogos cooperativos independem da hipótese de que as funções de resultados sejam transferíveis ou não (Shubik, 1987, p.369).

O uso da hipótese de transferência de utilidade é uma forma de simplificar o estudo dos jogos cooperativos, sem perda dos aspectos relevantes do jogo, como mostram Luce e Raiffa (1957) e Friedman (1977). Essa propriedade permite trabalhar com o valor máximo alcançável pela soma de utilidades dos participantes de uma coalizão K. Dessa forma, a função característica será representada por um único valor v(K), sem se preocupar com outros possíveis valores que ela poderia alcançar. Interessa, com efeito, apenas o valor máximo que a coalizão pode conseguir (Hein, Horner, Rautenberg, 2004b), o qual será redistribuído mediante pagamentos feitos à parte.

Redefinindo a função característica de um jogo de n-pessoas, como: um valor real definido nos subconjuntos de I, que atribui a cada K o máximo valor (para K) do “jogo de duas pessoas” realizado entre K e I-K, supondo que essas duas coalizões se formem. Portanto, daqui por diante, v(K) representa o máximo valor que os membros de K podem obter do jogo, independente do que o restante dos participantes possa fazer. Por razões óbvias, segue que:

(3) $v(\emptyset) = 0$

e ainda: se K e L são duas coalizões disjuntas, só unirão suas forças, logicamente, se conseguirem no mínimo o que poderiam ganhar se agissem separadamente. Logo, a função característica v(K) deve obedecer a uma condição chamada superaditividade, isto é:

(4) $v(K \cup L) \geq V(K) + v(L)$ se $K \cap L = \emptyset$

O conceito de função característica é de crucial importância para a análise de solução para os jogos cooperativos. Essa categoria de jogo, ao contrário da dos jogos não-cooperativos, fornece um espaço extenso e propício para uma gama de diferentes conceitos de solução. Por essa razão são apresentados apenas aqueles jogos considerados mais importantes pela literatura especializada no assunto.

Dada a propriedade de superaditividade da função característica v, é razoável supor que a grande coalizão, ou seja, a coalizão de todos elementos do conjunto I, se formará. Dessa forma, portanto, a questão que resta será: como o valor de v (I) se distribuirá entre os participantes, de maneira que essa distribuição seja estável. Para analisar essa questão define-se uma imputação ou uma alocação como sendo uma redistribuição exaustiva do valor da grande coalizão, que atribui ou distribui para cada jogador no mínimo a quantidade que ele garantiria para si, se não entrasse para a grande coalizão. Representando por x □ □n o vetor de resultados e

(5) $$x(k) = \sum_{i \in k} x_i$$

como o somatório de todos os componentes de x, será uma imputação se obedecer às seguintes condições:

(6) $x_i \geq v(\{ i \})$ para todo i □ I, e

(7) $x(I) = V(I)$

Se for denominado de X(v) □ □ o conjunto de todas imputações de um dado jogo expresso na forma de função característica, uma solução pode ser definida como um subconjunto de X(v) consistindo das imputações que não forem eliminadas pelo conjunto de “filtros”, ou restrições, são expostos logo adiante. O conjunto de restrições que regerá o processo de negociação é que definirá os diversos conceitos de solução para um jogo cooperativo.

Nesse processo de negociação ou barganha, uma imputação x pode naturalmente não satisfazer algum participante k; nesse caso diz-se que o participante k tem uma objeção àquela imputação x. Formalmente, um jogador k, k □ K □ I, tem uma objeção (y, K) à imputação x se

(8) yi > xi, para todo i □ K, e

(9) y(K) ≤ v(K)

As propriedades (8) e (9) são as mesmas propriedades que compõem a relação denominadas de dominância. Portanto, se as propriedades (8) e (9) ocorrerem simultaneamente, pode-se também dizer que y domina x, ou x é dominada por y, via coalizão K. Nesse processo, outra situação pode ocorrer: os indivíduos que não entraram na coalizão K podem reagir e formar ou ameaçar formar uma outra coalizão L em contraposição à coalizão K. Nesse caso, diz-se que o jogador I $\in$ KC, sendo KC o conjunto complementar do conjunto K, tem uma contra-objeção (z, L), I $\in$ L, à (y, K) de k, k $\in$ L, se

(10) zi

O núcleo, representado por Ker(v), é definido como o conjunto de todas imputações não dominadas via coalizão, ou o conjunto daquelas para as quais não existem objeções. Nesse caso escolhe-se a(s) solução(ões) eliminando no curso da negociação as imputações para as quais foi apresentada alguma objeção. Formalmente o núcleo pode ser representado pelo conjunto de todas imputações x tais que

(13) $$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset I$$

A expressão matemática acima garante que se qualquer grupo de indivíduos S, que faça parte do conjunto de indivíduos que compõem o jogo, resolver fazer uma coalizão, nunca obterá um valor maior do que a soma dos ganhos individuais que ele obtém na imputação x. Qualquer imputação pertencente ao núcleo é estável, no sentido de que não existe nenhuma coalizão que possua simultaneamente o estímulo e o poder de mudar o resultado do jogo (Hein; Horner; Rautengerg, 2004a).

O núcleo pode ser apresentado de outra forma. Seja e (x, K) = v(K) - x(K) a reclamação dos membros da coalizão K em relação à imputação x. Pode-se então expressá-lo como o conjunto de todas as imputações (Hein; Horner; Rautengerg, 2004b) contra as quais não possam existir máximas reclamações que não sejam menores ou iguais a zero, isto é:

$$Ker(v) = \{x \in X(v) \, / \, \max_{K \subset I} e(x, K) \leq 0\} \quad (14)$$

O conjunto-negociação constitui a união entre o conjunto das imputações que não possuem objeções e o conjunto das imputações que possuem objeções, porém, não justificadas. Mais precisamente, constitui o conjunto das imputações que restam quando no processo de negociação uma imputação só é eliminada quando tem uma objeção e essa objeção é justificada (Owen, 1968, p. 188).

Dada essa definição, fica claro que o conjunto-negociação deve conter o núcleo se este existir. E, se o núcleo não existir, ainda tem-se a possibilidade de encontrar solução por meio do conjunto-negociação.

O conjunto-solução de Von Neumann-Morgenstern, NM (v), é representado pelo conjunto de imputações que satisfazem simultaneamente duas condições:(1) para quaisquer duas imputações pertencentes ao conjunto NM(v), uma não pode ser dominada pela outra; (2) qualquer imputação que não pertença ao conjunto NM(v) deve ser dominada por alguma imputação pertencente ao conjunto NM(v), (Von Neumann; Morgenstern, 1972).

Uma das principais dificuldades de se utilizar o conceito de solução de Neumann e Morgenstern (1972), é que nem a existência e nem a unicidade são garantidas. Nenhuma prova geral da existência do conjunto-estável foi feita até agora (Owen, 1968).

O Nucléolo, Nu (v), constitui um critério que seleciona as imputações de forma a minimizar a máxima queixa ou reclamação que qualquer coalizão possa ter contra elas.

O procedimento para se encontrar o nucléolo, Nu (v), o que significa aplicar o princípio *minimax*, exige que se faça uma comparação entre as diversas imputações, de forma a encontrar aquela cuja máxima reclamação associada a ela seja menor do que a máxima queixa associada a qualquer outra imputação. Para isso, ordenam-se as 2n coalizões contidas em I (incluindo o subconjunto N contendo todos elementos de I e o conjunto vazio □) K1, K2,., K2n e se constrói uma função θ(x), tal que:

(15) θ(x) = (θ1(x), θ2(x),...,θ2n(x)) □ □2n;

(16) θj (x) = e(x,

Kj) e

(17) θj (x) > θj+1(x) para j = 1,2,...,2n-1.

Dadas duas imputações x e x', os vetores de queixas associados respectivamente a θ(x) e θ(x) podem ser comparados depois de ordenados lexicograficamente. Desta forma, pode-se dizer que θ(x) é lexicograficamente menor que θ(x') se θ1(x) < θ1(x') ou θ1(x) = θ1(x'), para i = 1, ..., j-l e j > 1. Essa relação pode ser representada por $\theta(x) \leq_L \theta(x')$. Se θj(x) = θj(x') para todo j, então $\theta(x) =_L \theta(x')$, e $\theta(x) \leq_L \theta(x')$ significa que $\theta(x) <_L \theta(x')$ $\theta(x) =_L \theta(x')$

Isto é, o nucléolo do jogo v consiste de todas aquelas imputações x e X (v) que possuem as menores queixas, lexicograficamente, associadas a elas. Dessa forma o nucléolo acaba se constituindo numa forma de tornar menor possível o protesto da coalizão mais descontente.

A importância do nucléolo é que se X (v) é compacto o Nu (v) não é vazio; se X (v) for compacto e convexo, o Nu (v) será constituído de um único elemento; e se o núcleo não for vazio, o nucléolo será um subconjunto do núcleo (Moulin, 1981). Uma solução para problemas contínuos foi proposta por Kohlberg ao demonstar que é possível, em algumas situações, calcular o núcleo como a solução de um problema de programação linear (Kohlberg, 1972a, b).

O Valor de Shapley, apresentado em 1953 no texto “A value for npersons games da obra “Contributions to the Theory of Games”, organizada por H. W. Kuhn e A. W. Tucker (Luce; Raiffa, 1957), é um conceito de solução que constitui um critério que distribui para cada participante do conjunto I, um valor Φ (v) baseado em quatro axiomas:

1. produz uma distribuição exaustiva do valor total da grande coalizão, isto é, $\sum_{i \in I} \Phi_i (v) = v(I)$;

2. se um jogador i não adiciona nada mais que v({i}) a nenhuma coalizão, ele recebe somente v({i}), isto é, Φi(v) = v({i}),

3. se dois jogos são idênticos, exceto quanto à ordem na qual os seus jogadores estão listados, o valor de Shapley para os jogadores é o mesmo;

4. se um jogo é formado pela adição de dois outros jogos, o valor de Shapley para o novo jogo será a soma dos valores de Shapley dos jogos iniciais.

Pode-se demonstrar (Owen, 1968) que existe uma e somente uma função que preenche as condições estabelecidas pelos axiomas citados acima. E ela atribui a cada participante i do jogo um ganho ou valor dado por:

(19) $$\Phi_i(v) = \sum_{K \subset I} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}\left[v(K) - v(K/\{i\})\right]$$

onde k representa o número de indivíduos que compõem a coalizão K.

A expressão de Φi(v), o valor que cada indivíduo recebe mediante essa forma de redistribuição, sugere uma interpretação probabilística, na qual $[v(K) - V(K/\{i\})]$ exprime a contribuição marginal do jogador i ao valor da coahzão K e $\frac{(n - k)!(k - 1)!}{n!}$ a probabilidade de que no processo aleatório de formação da grande coalizão 1, o indivíduo i seja o jogador acrescentado à coalizão consistindo, ou que consistia, dos primeiros k- 1 jogadores naquela ordem aleatória. O ganho de cada jogador pode ser visto como média ponderada das contribuições que o jogador fornece a cada coalizão que ele participa, onde os pesos seriam valores que dependem do total de jogadores n e do número deles em cada coalizão K, ou seja, k. O valor de Shapley pode ainda ser interpretado como um critério que atribui a cada participante do jogo a sua contribuição marginal esperada.

A fórmula do valor de Shapley pode ser deduzida diretamente por meio da interpretação probabilística dada anteriormente. Suponha que os n jogadores combinem encontram-se em um determinado lugar em uma determinada hora. Devido à aleatoriedade, eles chegarão em momentos diferentes no tempo. Suponha também que as ordens de chegada (o número de permutações de n jogadores) têm a mesma probabilidade, isto é, l/n!. Considerando que se um jogador i quando chega já encontra os membros da coalizão [K - {i}] ele recebe a quantia [v(K) – v(K\{i})], ou seja o valor marginal com o qual ele contribui para aquela coalizão. Logo, o valor de Shapley será o valor esperado de ganho do jogador i sob esse esquema aleatório.

Outra maneira análoga de se deduzir a mesma fórmula seria imaginar-se um evento A, que fosse definido como: A={escolher o jogador i pertencente obrigatoriamente à coalizão de k elementos} e um evento B, onde fosse definido como B = { escolher os outros k-l elementos da coalizão entre os n-1 jogadores restantes }. A probabilidade dos eventos A e B ocorrerem simultaneamente seria:

$$P(A \cap B) = P(P/A)P(A) = \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}} \times \frac{1}{n} = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$$

$\frac{(n-1)!}{\quad}$ n n! $(k-1)![n-1-(k-1)]!$

(20) , da

qual se deduz o valor esperado para cada jogador como:

(21) $$\Phi_i(v) = \sum_{K=1}^{n} \frac{(n-k)!(k-1)!}{!}[v(K) - v(K/\{i\})]$$

Para finalizar, observe-se que o valor de Shapley, Φi(v) é uma imputação, dado que:

(22) $$\sum_{i \in I} \Phi_i(v) = v(I),$$ e

(23) $\Phi i(v) \geq v(\{i\}), \forall\ i \in I.$

3.1 Aplicação da Teoria dos Jogos à Distribuição de Custo Conjunto

Empresas de uma corporação industrial, cooperativas, aeronaves que utilizam um mesmo campo de aviação, ou indivíduos que têm interesse em desempenhar atividades em conjunto, por exemplo, defrontam-se em geral com a questão de distribuição de custos conjuntos. A "contabilidade tradicional" sugere várias maneiras de ratear custos (Leone, 2000; Atkinson, 2000; Shank e Govindarajan, 1997; Jiambalvo, 2001; Martins, 2003). No entanto, todas essas maneiras apresentam arbitrariedades e só são aceitas pelas partes envolvidas quando estas estão submetidas a um poder central que as impõem. Isto é, todos esses métodos só podem ser aceitos, em geral, quando as partes não possuem a possibilidade de atuar sozinhas ou por meio de coalizões.

A imposição desses critérios de rateio às vezes é feita pelo governo ou por uma autoridade central que comanda as partes envolvidas. Contudo, a questão assume outro aspecto quando não existe um poder centralizado, de forma que as partes, livres para aceitar ou não um determinado critério de rateio pode inviabilizar um determinado projeto e, consequentemente, promover situações desastrosas, não só para o grupo como para o resto da sociedade.

Supondo, por exemplo, que uma atividade possa ser desenvolvida por indivíduos isolados ou por uma coalizão desses indivíduos. Se a atividade for realizada isoladamente por cada indivíduo, estes incorrem em um custo particular. Se for desempenhada por um grupo, ou pela comunidade como um todo, haverá um ganho de escala que reduzirá consideravelmente o custo total, ou seja, o custo total será consideravelmente menor que a soma de todos os custos individuais se os agentes atuar isoladamente. O problema com o qual se depara é: como distribuir o ganho de escala entre os agentes que participaram, em conjunto, dessa atividade? Em outras palavras, como distribuir o custo conjunto, dado que não existe uma forma objetiva, direta e, portanto, inquestionável de se ratear o custo total entre os participantes do projeto?

Uma ilustração do problema pode ser feita mediante o exemplo da construção de barragens que podem ser construídas para atender a vários objetivos. Supondo, por exemplo, que o custo da construção de uma barragem com o propósito de fornecer água para irrigação seja de 10 bilhões de reais, enquanto o custo de uma barragem para a contenção de enchentes é de 8 bilhões de reais. Pode-se construir uma barragem que atenda a ambos os propósitos por 15 bilhões de reais. Nesse caso existe um ganho de 3 bilhões de reais se a barragem for construída conjuntamente, e esse benefício deve ser distribuído entre os participantes do empreendimento mediante o rateio do custo total de 15 bilhões de reais. Como existem apenas dois participantes, a questão torna-se bem simples. Basta que, como condição necessária, os custos sejam distribuídos de forma que nenhum participante se sinta subsidiando o outro. Isto é, a distribuição de custos não pode impor que um agente subsidie o outro. Formalmente, se denomina de $C(\{i\})$, $i = 1,2$, o custo de construção da barragem para atender o objetivo do agente i e $R(\{i\})$ a sua respectiva contribuição, a condição para que não haja imposição de subsídio será então:

(25) $R(\{i\}) \leq C(\{i\})\ i = 1,2.$

A questão torna-se simples quando envolve apenas dois agentes porque, nesse caso, só existe uma possibilidade de coalizão, ou seja, a coalizão dos dois agentes. Quando existem mais de dois agentes, a possibilidade de coalizões obviamente aumenta e pode ocorrer que a condição posta acima não baste como mínimo necessário para que a distribuição de custo seja aceitável pelos envolvidos. Nesse caso, deve-se levar em conta não só os agentes, mas as suas possíveis coalizões. Consequentemente, para que nenhum agente ou coalizão se sinta subsidiando alguém, torna-se necessário que a distribuição de custos satisfaça a seguinte condição:

(26) $R(S) \leq C(S)$, onde $P(S) = \sum_{i \in S} R(\{I\})$ para todo $S \subseteq I$,

onde I é o conjunto de todos os participantes e S representa qualquer coalizão em I, incluindo tanto o próprio I como qualquer "coalizão" de um único elemento.

Na forma em que foi posta a questão pode-se facilmente transportá-la para a Teoria dos Jogos. Assim, a distribuição de custo entre os agentes pode ser feita caraterizando a questão como um jogo cooperativo com pagamentos colaterais. A função de custo determina a função característica de um "jogo de distribuição de custos" subaditiva, em vez de superaditiva, enquanto o vetor de receitas ou contribuições, representa o vetor de resultados. Se o vetor de resultados pode ser representado como:

$$\sum_{i \in S} R(\{i\}) = C(I). \quad (27)$$

então pode ser visto como uma imputação. Se este vetor de resultado além de atender a condição (27) satisfaz também a condição (26) então ele se encaixa perfeitamente no conceito de núcleo, dado que nenhuma destas imputações pode ser bloqueada por nenhuma coalizão de jogadores, no sentido de que seria mais vantajoso (ou menos custoso) contribuir com R(S) do que construir a barragem através da coalizão S, a qual teria um custo C(S) ≥ R(S).

Supondo agora que uma barragem possa ser construída para três objetivos diferentes: produção de energia elétrica, controle de enchentes e irrigação. Tem-se agora 3 agentes indexados de acordo com seus interesses: i=1 representa o agente interessado na produção de energia elétrica; i=2, o agente interessado no controle de enchentes; e i=3, o agente interessado na contenção de água para irrigação. Suponhando que o custo de construção da barragem para a produção de energia elétrica seja C({1})=10 bilhões de reais; para o controle de enchentes seja C({2})=8 bilhões de reais; e para a contenção de água para irrigação seja C({3})=7 bilhões de reais, e os agentes podem coligar-se livremente para a construção da barragem. Nesse caso, supondo que o custo da construção para atender simultaneamente à produção de energia elétrica e ao controle de enchentes seja C({1,2})=15 bilhões de reais; para atender à produção de energia e a irrigação seja C({1,3})=14 bilhões de reais; para atender ao controle de enchentes e a irrigação seja C({2,3})=16 bilhões de reais; e, finalmente, para atender aos três objetivos seja C({1,2,3})=20 bilhões de reais, qual deverá ser a distribuição de custos entre os 3 agentes para que construam uma só barragem para atender conjuntamente aos três objetivos, dado que dessa forma teriam um ganho de 5 bilhões de reais em relação ao custo que teriam se as barragem fossem construídas individualmente?

A questão se resume em encontrar o núcleo do jogo cooperativo caracterizado pela situação. Portanto, bastaria encontrar um conjunto de imputações que não sejam dominadas via nenhuma outra coalizão. Ou seja, basta encontrar uma distribuição de custos definida pelos valores Ri, i = 1,2,3, tais que:

(28) $\sum R_i = C(\{1,2,3,\})$ e

(29) R (S) ≤ C (S), $S \subseteq \{1,2\,3,\}$.

Para tanto bastaria elaborar um programa de computação que determinasse os valores de R1, R2, e R3 tais que:

(30) P1 ≤ 10

(31) P2 ≤ 8

(32) P3 ≤ 7

(33) P1 + P2 ≤ 15

(34) P1 + P3 ≤ 14

(35) P2 + P3 ≤ 16

(36) P1 + P2 + P3 = 20.

Supondo que a distribuição de custos se faça apenas em forma de números inteiros tem-se um núcleo de nove elementos, ou seja: (5, 8, 7), (6, 8, 6), (6, 7, 7), (7, 8, 5), (7, 7, 6), (7, 6, 7), (8, 7, 5), (8, 6, 6), (9, 6, 5). Estas seriam as possíveis distribuições de custos de forma que a barragem pudesse ser construída para atender aos três objetivos em conjunto e sem que houvesse subsídios cruzados. Porém, como existe mais de uma distribuição possível do custo total, poder-se-ia aplicar tanto o conceito de solução chamado nucléolo como o valor de Shapley para auxiliar a busca de uma solução única.

O nucléolo não daria uma distribuição pertencente ao núcleo de forma a minimizar as queixas de qualquer outra coalizão contra ela. Aplicando o processo de maximização lexicográfica encontra-se o nucléolo igual a (7, 7, 6). Aplicando o conceito de valor de Shapley, em que, implicitamente, se considera o resultado como uma distribuição "justa", dado que cada agente recebe o valor esperado de sua contribuição marginal, encontra-se o mesmo vetor (7, 7, 6). Portanto, uma razoável proposta de distribuição de custo para esta questão hipotética deve ser (7, 7, 6), porque ela está no núcleo; representa no núcleo a distribuição que minimiza as reclamações das outras possíveis coalizões; e diz respeito a uma distribuição na qual cada agente é sobrecarregado proporcionalmente à sua contribuição ao ganho de 5 bilhões de reais na construção da barragem para atender aos três objetivos em conjunto.

Não existe obviamente forma de se obrigar os agentes a aceitarem qualquer distribuição contida no núcleo. Mas todos preferem está à qualquer outra alternativa. A distribuição (7, 7, 6) pode ser usada pelo mediador da questão, que por sua vez pode usar simultaneamente, como forma de persuasão, o conceito de nucléolo e o do valor de Shapley.

Uma outra aplicação muito evidenciada na literatura foi proposta por Martin Shubick (1962). A "contabilidade" apresenta vários critérios de rateio de custos conjuntos e todos eles são criticados por Shubick pelo fato de não apresentarem formas descentralizadas de incentivos aos diversos centros de produção ou departamentos de uma corporação, para a inovação.

Segundo Shubick (1962), o objetivo de uma boa gerência seria projetar um sistema de premiação para aqueles que assumem riscos no processo de tomada de decisão, de tal maneira que os prêmios individuais tenham uma correlação positiva com o valor do resultado da decisão para a organização. Em uma corporação, se o poder de decisão deve ser delegado, é preferível ter uma organização projetada para encorajar a iniciativa dos centros de decisão. Uma forma de promover isso seria-se ter uma estrutura de premiação projetada de forma que a seleção das melhores opções para o tomador de decisão individual coincida sempre com aquelas que são melhores para a organização como um todo. Este requisito não está garantido pelos métodos convencionais de distribuição de custo conjunto oferecido pela “contabilidade”. Por exemplo: a gerência de uma fábrica pode muito bem ter conhecimento de uma mudança, que por sua vez pode ter o efeito de aumentar o lucro da corporação, no entanto, a decisão implica em diminuir o tamanho de sua fábrica e reduzir o lucro a ela atribuído pelo sistema contábil. Se o seu êxito e sua renda são determinados pelos lucros contábeis atribuídos à sua fábrica, ou seu departamento, provavelmente ela, contraditoriamente, não estará interessada em tomar essa decisão.

A lucratividade de uma corporação pode ser vista como dependente da soma dos lucros conjuntos que, por seu turno, podem ser obtidos pela coordenação ótima de todas as unidades, por exemplo, fábricas, departamentos, etc. E, como existe um custo administrativo, que é um custo conjunto, ele deve ser rateado entre todos os centros de decisão, de forma que o interesse privado de cada centro de decisão coincida com o interesse da organização. Esta situação configura um jogo cooperativo cujos agentes são os centros de decisão que compõem a corporação.

Uma situação semelhante se verifica nas empresas, quando estes adotam conjuntamente investimentos que têm efeito sinérgico produzindo uma receita líquida maior. A alocação dos custos financeiros, nesses casos, é em geral arbitrária. Callen (1978) mostra como o conceito de valor de Shapley pode ser utilizado para a distribuição de custos financeiros de projetos interdependentes, de forma mais consistente.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar dos curtos períodos de estagnação, a Teoria dos Jogos nunca deixou de progredir. Sua história mostra um processo contínuo de desenvolvimento de novos conceitos e técnicas. Há momentos, no entanto, em que sua evolução e especialização atingem um estágio no qual, aparentemente, se rompe o elo entre conceito e realidade. O alto grau de abstração, necessário para a formulação dos novos conceitos e para compreensão das novas técnicas, pode fazer com que essa metodologia, que mantém íntima relação com o comportamento humano, venha ser erroneamente encarada como mera abstração, sem nenhuma ligação com o mundo real. A sistematização aqui apresentada adquire importância não somente por reunir os conceitos fundamentais, dos quais derivam todos os conceitos modernos, mas também porque, ao expor tais conceitos básicos, permite a pronta visualização do limite existente entre a teoria e a prática. Em outras palavras, esta sistematização põe em relevo o pressuposto em que se alicerça essa metodologia: o de que os homens estabelecem relações visando a satisfação de seus interesses.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARROW, K. J. 1965. **Social choice and individual values.** Wiley, New York, p. 458.

ATKINSON, A., BANKER, R.D., KAPLAN, R.S., YOUNG S.M. 2000. **Contabilidade gerencial.** São Paulo, Atlas, 812 p.

CALLEN, J. L. 1978. Financial cost slocations: a game-theoretic approach. **The Account Review**, 53(2), April.

D´ASPREMONT, C., GABSZEWICZ, J.J. e THISSE, J.F. 1979. **On Hotelling´s Stability in Competition.** *In.* Econométrica 47, p. 1145-1150.

FARREL, J. MASKN, E. 1989. **Renegotiation in repeated games.** Games and Economic Behavior, 1(4), Dec.

FIGUEIREDO, R. 1993. **A modelagem do conflito e a teoria dos jogos: fundamentos econômicos e desdobramentos filosóficos.** Tese de doutorado. IEI/UFRJ, 279 p.

FRIEDMAN, J. W. 1977. **Oligopoly and the theory of games**. North-Holland, p. 279.

FUDENBERG, D. TIROLE, J. 1991.Perfect Bayesian Equilíbrium and Sequential Equilibrium. **Journal of Economic Theory**, 53:236-60.

GIBBARD, A. 1973. **Manipulation of voting schemes: a general result**, econometrica, 41, 587-601.

GREEN, E., PORTER, R. 1984. Non-Cooperative Collusion Under Imperfect Information. *In.* Econometrica 52, p. 87-100.

HEIN, N.; HORNER, Douglas; RAUTENBERG, Robson Raulino. 2004b. Equilíbrio de Nash: algumas considerações. *In:* Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa – 2004b. Córdoba. **Anais**...Simposio Argentino de Investigación Operativa.

HEIN, N.; HORNER, Douglas; RAUTENBERG, Robson Raulino. 2004a. Teoria dos jogos simultâneos e sequênciais. *In:* Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa, 2004, Córdoba. **Anais**...Simposio Argentino de Investigación Operativa.

HELLWIG, M. 1986. **Some recent developments in the theory of competition in markets**, mimeo, Universität Bonn.

HURVICZ, L. 1973. The Design of Mechanisms for Resource Alocation. **American Economic Review**, 63(02), May.

JACQUEMIN, A. 1987. **The new industrial organization**. MIT Press, p. 217. JIAMBALVO, J. 2001. **Contabilidade Gerencial.** Rio de Janeiro, LTC, 280p.

KOHLBERG, E. 1972b. **On the nucleolus of a Charactenstic Function Game**. SIAM J. AppI. Math. 20(1), Jan.

KOHLBERG, E. 1972a. **The nucleolus as a solution of a minimization problem**. SIAM J. Appl. Math. 23(O1), Julho.

KREPS, D. 1990. **A course in microeconomic theory**. Princeton University Press, p. 863.

LEONE, G.S.G. 2000. **Custos: planejamento, implantação e controle.** São Paulo, Atlas, p. 518. LUCE, R. D.; RAIFFA, H. 1957. **Games and Decisions.** Wiley e Sons, New York, p. 509.

MARTINS, Eliseu. 2003. **Contabilidade de Custos.** 9ª ed. São Paulo, Atlas, 370 p.

MORENO, D., WOODERS, J. 1996. **Coalition-Proof Equilibrium**, mimeo, MIT.

MOULIN, H., 1981. The proportional veto principle, Review of Economic Studies, Blackwell Publishing, vol. 48 (3):407-16.

NASH, J. F. 1951. **Non-cooperative Games.** Annals of Mathematics, n°54. OWEN, G. 1968. **Game theory.** Saunders, Philadelphia, p. 228.

SATTERTHWAITE, M. A. 1975. Strategy-proofness and arrows's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and Social Welfare Functions. **Journal Economic Theory**, April, 10(2):187-217.

SCHOTTER, A. SCHWODIAUER, G. 1980. Economics and Theory of Games. **Journal of Economic Literature**, vol. XVIII, Jun.

SHANK, J.K., GOVINDARAJAN, V. 1997. **A revolução dos custos.** Rio de Janeiro, Campus, p. 341. SHUBIK, M. 1987. **Game theory in social sciences.** MIT Press, Massachusetts, p. 528.

SHUBIK, M. 1962. Incentives, descentralized control, the assignnient of Joint Cost and Intemal Price. **Management Science**, 8(2), April.

TIROLE, J. 1988. **The theory of industrial organization.** MIT Press, Cambridge, p.483.

Von NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. 1972. **Theory of games and economic behavior. P**rinceton University Press, Princeton, p. 739.

Data de Submissão: 14/12/2007

Data de Aceite: 15/12/2007